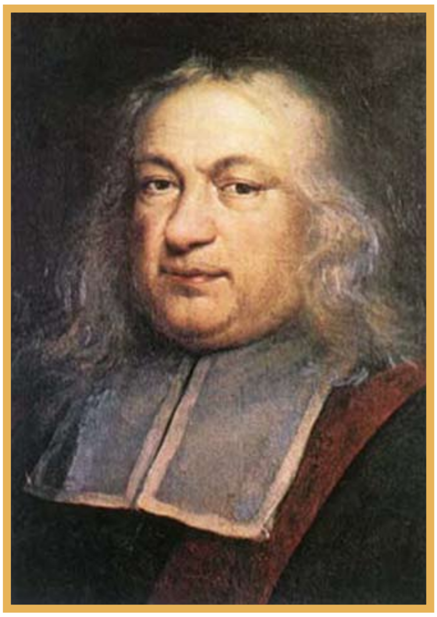


Pierre de Fermat (* Ende 1607 oder Anfang 1608 in Beaumont de Lomagne; † 12. Januar 1665 in Castres) war ein französischer Mathematiker und Jurist sowie (Mit-)entwickler der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Das mit Abstand wichtigste Instrument des modernen Risikomanagements ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Eine der ersten Universalgelehrten, die über den Tellerrand der Spieltische hinausschauten und die methodischen und theoretischen Grundlagen der Wahrscheinlichskeitstheorie formulierten, waren die drei Franzosen Blaise Pascal (* 19. Juni 1623 in Clermont-Ferrand; † 19. August 1662 in Paris), Antoine Gombaud (* 1607 in Monair de Méré; † 29. Dezember 1684 in Schloss Beaussais bei Niort; auch Chevalier de Méré genannt) und Pierre de Fermat.

Pierre de Fermat wurde zum Jahreswechsel 1607/08 in der südwestfranzösischen Stadt Beaumont de Lomagne geboren. Nach der Schulzeit studierte Fermat – auf Drängen seines Vaters – in den Jahren 1623 bis 1626 Zivilrecht an der Universität Orléans. Im Sommer 1626 schloss er das Studium mit dem „baccalaureus juris civilis“ ab und ließ sich als Anwalt am „parlement de Bordeaux“ nieder. Schließlich kaufte er das Amt eines „conseiller au parlement de Toulouse“ und wurde am 14. Mai 1631 in diesem Amt vereidigt.

Vom Glücksspiel zur Wahrscheinlichkeitsrechung

Fermat galt als ein Mensch mit einer geradzu erschreckenden Gelehrsamkeit. So sprach er alle wichtigen europäischen Sprachen, schrieb Gedichte in mehreren Sprachen und verfasste zahlreiche Kommentare zu Werken der griechischen und lateinischen Literatur. Er hat als Universalgelehrter wesentlich zur frühen Entwicklung der Integralrechnung beigetragen, im Alleingang die analystische Geometrie entwickelt, Forschungen zur Messung des Gewichts der Erde betrieben und im Bereich Lichtbrechung und Optik gearbeitet.

In seiner Freizeit widmete sich Fermat vor allem der Mathematik, insbesondere der algebraischen Zahlentheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Im Laufe seiner umfangreichen Korrespondenz mit Pascal hat er wesentliche Impulse zur Enstehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung geleistet. Insbesondere die Lösung des „Teilungsproblems“, an der Fermat und Pascal arbeiteten, bildet einen Eckstein des modernen Versicherungswesens und anderer Bereiche des Risikomanagements.

Blaise Pascal beschrieb am 29. Juli 1654 in einem Brief an seinen Kollegen Fermat zwei Probleme, die er bereits mit seinem Freund Chevalier de Méré diskutiert hatte – seither als De-Méré- oder Würfelproblem und Teilungsproblem (problème de partis) bekannt.

Das Teilungsproblem behandelt ein fiktives Spiel (beispielsweise einen Münzwurf) über mehrere Runden. Der Ausgang des Spieles ist in jeder Runde unabhängig vom Ausgang in den anderen Runden und in jeder Runde gewinnt Spieler A mit Wahrscheinlichkeit $\rho \in [0,1]$. Die Spieler vereinbaren, dieses Spiel über so viele Runden zu spielen, bis einer der beiden Spieler n mal gewonnen hat. Dieser erhält dann den Gewinn S ausbezahlt. Bei einem Spielstand von N–k gewonnen Spiele für A und N–l gewonnen Spiele für B müssen die beiden Spieler jedoch das Spiel abbrechen. Wie wird der Gewinn S gerecht unter den Spielern aufgeteilt? Pierre de Fermat in einem Antwortschreiben: *„Mein Herr, wenn ich versuche, eine bestimmte Augenzahl mit einem einzigen Würfel in acht Würfen zu erreichen [d. h. beispielsweise eine Sechs spätestens im achten Wurf], und wir, nachdem das Geld eingesetzt ist, übereinkommen, dass ich den ersten Wurf nicht ausführen werde, dann steht mir nach meinem Prinzip 1/6 des Gesamteinsatzes als Entschädigung zu auf Grund des besagten ersten Wurfes. Wenn wir danach noch übereinkommen, dass ich den zweiten Wurf nicht ausführen werde, muss ich zu meiner Entschädigung ein Sechstel des Restes [des Einsatzes] nehmen, das sind 5/36 [nämlich 1/6 von 5/6] des Gesamteinsatzes […]“*

Pascal und Fermat näherten sich der Lösung von verschiedenen Standpunkten. Fermat konzentrierte sich vor allem auf die reine Algebra. Pascal hingegen nutze eine geometrische Anordnung, um in die zugrundeliegende algebraische Struktur Transparenz zu bringen. So griff Pascal auf das „Pascalsche Dreieck“ zurück, das die rekursive Bestimmung der Binomialkoeffizienten gestattet. Sie sind im Dreieck derart angeordnet, dass ein Eintrag die Summe der zwei darüberstehenden Einträge ist. Der Name geht auf Blaise Pascal zurück, obgleich das Pascalsche Dreieck bereits im Jahr 1303 im Manuskript des chinesischen Mathematikers Chu Shih-chieh abgebildet wurde.

Experten interpretieren den Briefwechsel als Epochenereignis in der Geschichte der Mathematik und Wahrscheinlichkeitsrechnung bzw. als Geburtsstunde der Stochastik.

Fermats Letzter Satz

Der große fermatsche Satz (Fermats letzter Satz bzw. Fermats letztes Theorem) wurde um das Jahr 1637 von Pierre de Fermat formuliert, aber erst viele Jahre später, im Jahr 1993 bzw. 1998, von dem britischen Wissenschaftler Andrew Wiles zusammen mit seinem Schüler Richard Taylor bewiesen.

Fermats Letzter Satz besagt, dass die n-te Potenz einer Zahl, wenn $n > 2$ ist, nicht in die Summe zweier Potenzen des gleichen Grades zerlegt werden kann. In diesem Kontext sind ganze Zahlen $\neq 0$ und natürliche Potenzen gemeint. Formaler gesagt bedeutet dies:

Die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ besitzt für ganzzahlige a, b, $c \neq 0$ und natürliche Zahlen $n > 2$ keine Lösungen. Oder anders formuliert: Ist es möglich, dass eine Summe von zwei n-Potenzzahlen wieder eine n-Potenzzahl ist?

In diesem Kontext ist die Forderung wichtig, dass die gesuchten Lösungen a, b, c ganze, positive Zahlen sein sollen. Verzichtet man auf die Ganzzahligkeit und wählt man a, b als beliebige positive Zahlen, so erhält man offenbar stets eine Lösung indem man $c = \sqrt[n]{a^n + b^n}$ setzt.

Seilspanner und ihre mathematische Ableitung

Die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ für $n = 2$ kennt jeder Schüler im Zusammenhang mit einem der fundamentalen Sätze der euklidischen Geometrie, dem Satz des Pythagoras: In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c gilt obige Gleichung (wobei a und b die beiden Katheten sind und c die Hypothenuse). Bzw. umgekehrt: Aus obiger Gleichung folgt, wenn a, b, $c > 0$ angenommen wird, dass a, b, c die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks sind. Der nach Pythagoras von Samos benannte Satz ist theoretischer Ausdruck für die von ägyptischen, babylonischen und indischen Baumeistern und Priestern entwickelte Fähigkeit, bei Abmessungen von Feldern und Bauten mit Hilfe von Seilen präzise rechte Winkel zu erzielen. So erzielten die ägyptischen Seilspanner mit Hilfe von Zwölfknotenschnüren genaue rechte Winkel, indem sie 12 gleiche Teile eines langen Seils durch Knoten im Verhältnis 5:3:4 unterteilten und aus dem Seil mit Hilfe von Pflöcken ein Dreieck bildeten: es muss und wird sich auf diese Weise immer ein rechter Winkel ergeben (Pythagoreisches Tripel).

Die Frage lautet also: Gibt es rechtwinklige Dreiecke, deren Seitenlängen a, b, c ganzzahlig sind? Wir erkennen an den nachfolgenden Beispielen, dass es in der Tat rechtwinklige Dreiecke gibt, bei denen die Seitenlängen ganzzahlig sind.

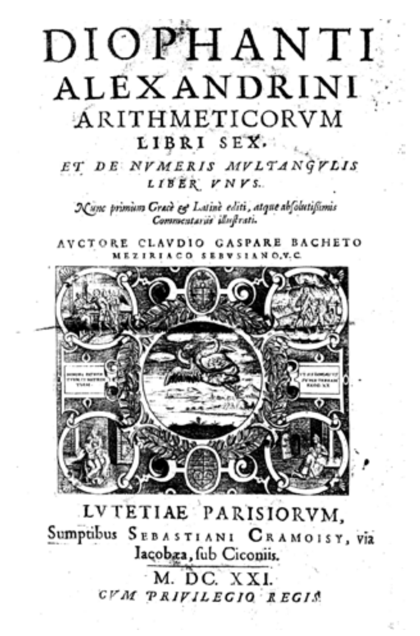
$3^2 + 4^2 = 5^2$
$8^2 + 6^2 = 10^2$
$5^2 + 12^2 = 13^2$
$15^2 + 8^2 = 17^2$
$4961^2 + 6480^2 = 8161^2$

Die zu beantwortende Frage ist nun, ob sich für alle ganzzahligen, positiven Löungen der pythagoräschen Gleichung (siehe oben) eine Systematik finden lässt? Hier hilft die Lektüre eines Buches des griechischen Mathematikers Diophantos von Alexandrien, der irgendwann im Zeitraum von 100 vor Chr. und 350 nach Chr. gelebt hat.

Diophants Werk „Arithmetika“ (siehe ▶ **Abbildung 01**) bestand aus insgesamt 13 Büchern, war jedoch lange Zeit verschollen und tauchte erst im 16. Jahrhundert in Europa wieder auf. Im sechsten Buch fand Pierre de Fermat die Lösung der pythagoräischen Gleichung:

▶ Abb. 01

Titelbild der 1621 verlegten Arithmetika



DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.

LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Man nehme zwei ganze Zahlen $u > v > 0$ und setze

$a = u^2 - v^2$
$b = 2uv$
$c = u^2 + v^2$

Berühmt wurde das Theorem (heute bekannt als Fermatsche Vermutung bzw. Großer Fermatscher Satz) dadurch, dass Fermat in einer Randnotiz seines Exemplars der Arithmetica behauptete, dafür einen „wahrhaft wunderbaren“ Beweis gefunden zu haben, für den aber „auf dem Rand nicht genug Platz“ sei. Die Randbemerkung findet sich exakt an der Stelle, an der Diophant den Fall $n = 2$ diskutiert.

Mit anderen Worten: Fermat stellte sich die offensichtliche Frage, was aus der pythagoräischen Gleichung (siehe oben) wird, wenn man den Exponenten 2 durch 3 oder durch irgendeine natürliche Zahl $n > 2$ ersetzt. Besitzt die entstehende Gleichung ebenfalls ganzzahlige, positive Lösungen?

Fermat fand nun heraus, dass für $n > 2$ ganz andere Verhältnisse herrschen als für $n = 2$. Denn die Randnotiz von Fermat lautete wie folgt:

Cubum autem in duos cubos aut quadrato quadratum in duos quadrato quadratos et generaliter nullam in infinitum quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere. Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Deutsche Übersetzung: Es ist nicht möglich, einen Kubus in zwei Kuben oder ein Biquadrat in zwei Biquadrate und allgemein eine Potenz, höher als die zweite, in zwei Potenzen mit demselben Exponenten zu zerlegen. Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis, doch ist der Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen.

Mehr als 350 Jahre knobelten Mathematiker an diesem Problem. Selbst Größen wie Gauß oder Euler bissen sich die Zähne aus (siehe ▶ **Info-Box 01**).

Der britische Wissenschaftler Andrew Wiles bewies im Jahr 1993 bzw. 1998 (die Beweisführung war im Jahr 1993 noch lückenhaft) endgültig den letzten Satz von Fermat. Demzufolge gibt es keine Zahl n, die die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ erfüllt. Die Schlüsselidee zum Beweis stammt von dem deutschen Mathematiker Gerhard Frey. Im Jahr 1986 fand in Paris eine internationale Mathematiker-Tagung statt. Dabei stellte Frey seine Ideen über den Zusammenhang zwischen dem Fermat-Problem und der Taniyama-Vermutung vor. Die Zahlentheoretiker waren beeindruckt. Plötzlich erhob sich einer der Teilnehmer und erklärte, dies sei wohl der richtige Weg zum Beweis der Fermat-Vermutung. Der Name dieses Teilnehmers war Andrew Wiles. Nach der Tagung in Paris arbeitete Wiles sieben Jahre lang intensiv an der Lösung der Fermatschen Vermutung. Mit Hilfe der Iwasawa-Theorie und der Kolywagin-Flach-Methode gelang es schließlich Wiles, die Fermatsche Vermutung zu beweisen.

Unter Mathematikern gilt der Beweis von Andrew Wiles als einer der bedeutendsten des 20. Jahrhunderts. Heute nimmt man an, dass sich Fermat geirrt hat und er wohl später bemerkt hat, dass sein „wunderbarer Beweis“ nicht stichhaltig war, versäumte es jedoch, seine Randbemerkung entsprechend zu korrigieren. Dafür spricht, dass Fermat in späteren Briefen dieses Problem nur in den Fällen $n = 3$ und $n = 4$ erwähnt.

Exkurs: Die Suche nach dem Beweis

Paul Friedrich Wolfskehl (* 30. Juni 1856 in Darmstadt; † 13. September 1906 in Darmstadt) war Arzt und litt an Multiple Sklerose und konnte daher seinen Beruf nicht ausüben. Daher entschloss er sich, Mathematik zu studieren. So studierte er einige Jahre bei Ernst Eduard Kummer (siehe ▶ **Info-Box 01**) in Berlin und begegnete dort das erste Mal Fermats letztem Theorem. Offenbar war er von dem mathematischen Rätsel so fasziniert, dass er in seinem Testament die – für damalige Zeiten beachtliche – Summe von 100.000 Goldmark für die Person stiftete, der das Fermat-Problem vollständig lösen würde.

Eine andere Legende erzählt, dass seine Liebe zu einer Frau von dieser nicht erwidert wurde, so dass er den Entschluss fasste, sein Leben zu beenden. Der Zeitpunkt seines Freitodes setzte er auf Mitternacht fest und vertrieb sich die Zeit bis dorthin mit dem Fermat-Problem. Die Legende berichtet weiter, dass er bei dieser Arbeit derart gefesselt war, dass er über ihr die Zeit vergaß. Wolfskehl überlebte wohl aus diesem Grund die Nacht und ließ von seinen Selbstmordgedanken ab. Gleich darauf änderte er aus Dank sein Testament.

Nach der Stiftungssatzung sollte die Summe von der Göttinger Akademie der Wissenschaften verwaltet werden, die auch die Richtigkeit der eingegangenen Lösungen zu prüfen hatte. Nach Ablauf von etwa 100 Jahren (Einsendeschluss: 23. September 2007) sollten die 100.000 Goldmark an die Akademie fallen, wenn sich bis zu diesem Zeitpunkt niemand mit einer richtigen Lösung gemeldet hatte. Im Jahr 1997 wurde der Preis an Andrew Wiles ausbezahlt.

Quellenverweise und weiterführende Literaturhinweise:

Barner, K. (2001): *How old did Fermat become?, in: Das Leben Fermats, Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Heft 3, 9(2001), Berlin, S. 209–228.*

Renyi, A. (1972): *Briefe über die Wahrscheinlichkeit, Berlin 1972.*

Roquette, Peter (1998): *Zum Fermat-Problem, Vortrag im Mathematischen Institut der Universität Heidelberg am 24.1.1998.*

Singh, S. (2000): *Fermats letzter Satz, München 2000.*

Wiles, A. (1995): *Modular Elliptic Curves and Fermat's last theorem. Annals of Mathematics 141 (1995), 443–551*

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Bearbeitungsstand: 1. September 2007, 07:17 UTC. URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Fermat (Abgerufen: 5. September 2007, 22:00 UTC)

Beweis(-versuche) der Fermatschen Vermutung

▶ Info-Box 01

Pierre de Fermat (1607/08–1665)
1637: Problemstellung, Beweis für n = 4, und später andeutungsweise für n = 3.

Leonhard Euler (1707–1783)
n = 3: Beweis unvollständig

Johann Carl Friedrich Gauß (1777–1855)
n = 3: vollständiger Beweis

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859)
n = 5: Dirichlets Beweis war zunächst unvollständig; nach Kritik durch Legendre gab er einen Ansatz zur Vervollständigung; dieser wurde 1828 in Crelles Journal ausführlich publiziert

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet
n = 14: 1832 in Crelles Journal

Gabriel Lamé (1795–1870)
n = 7: 1839 in Liouvilles Journal

Gabriel Lamé
beliebig: 1841 in Liouvilles Journal (Beweis erschien unvollständig; Kritik durch Liouville)

Ernst Eduard Kummer (1810–1893)
1844 in der Festschrift für das Königsberger Universitätsjubiläum: Die Lücke im Beweis bei Lamé kann nicht geschlossen werden! Der Beweisversuch von Lamé ist also endgültig als falsch zu bewerten.
Kummers monumentales Theorem 1850 in Crelles Journal: Beweis für alle Primzahlexponenten n = p, bei denen p eine so genannte „reguläre" Primzahl ist.

Andrew Wiles (* 1953)
Im Jahr 1994 gelang es dem britischen Mathematiker Andrew Wiles zusammen mit seinem Schüler Richard Taylor, die Fermatsche Vermutung zu beweisen. Die Zahlentheoretiker gerieten in Aufruhr, denn mit Fermat war auch eine von dem Japaner Yutaka Taniyama 1954 veröffentlichte Strukturbeschreibung elliptischer Kurven bestätigt. Der Beweis der Taniyama-Vermutung ist die große Leistung Andrew Wiles, aber die Verknüpfung zweier 350 Jahre getrennter Theorien ist die große Leistung von Gerhard Frey.

TICKER +++ TICKER +++ TICKER+++ TICKER +++ TICKER

+++ **BdB stärkt Aufsicht den Rücken:** Prof. Dr. Manfred Weber, Geschäftsführender Vorstand des Bundesverbandes deutscher Banken (BdB) hält die aktuellen, teilweise sehr weitgehenden Meinungsäußerungen aus dem politischen Raum hinsichtlich Veränderungen im System der deutschen Bankenaufsicht nicht für zielführend. Nach Ansicht von Weber sollte man das Pferd nicht vom Schwanz her aufzäumen. Allemal seien zunächst die aufsichtlichen Hintergründe der Problemfälle aus den letzten Wochen zu klären, wie dies der Bundesfinanzminister bereits angekündigt habe. Weiterhin sagte Weber, er sei unabhängig davon dezidiert der Meinung, dass im Jahre 2002 mit der Gründung der BaFin und der Einbindung der Bundesbank ein sehr gutes Aufsichtssystem in Deutschland etabliert worden sei, das sich auch international sehen lassen könne. Weber plädierte dafür, grundsätzlich an dem bestehenden Strukturen festzuhalten, wenngleich die praktische Zusammenarbeit zwischen beiden Institutionen im Einzelnen noch der Adjustierung bedürfe. +++ **Angst vor Arbeitslosigkeit und Krankheit ist wichtigstes Thema für Finanzberater:** Die Angst, aufgrund von Arbeitslosigkeit oder Krankheit den finanziellen Status quo einzubüßen, steckt für die Mehrzahl der Bevölkerung in Deutschland den Rahmen für die privaten Finanzen ab. Dies ist ein Ergebnis einer aktuellen Studie der Finanzberatungsgesellschaft Plansecur unter 280 Finanzberatern. Demnach erleben 90 Prozent der Teilnehmer die Absicherung bei Erkrankung oder Verdienstausfall als das wichtigste Thema in der Finanzberatung von Privathaushalten. Eine wesentliche Rolle spielt daneben der Nachwuchs: So schreiben 59 Prozent der Experten der Finanzierung der Ausbildungskosten für die Kinder eine wesentliche Rolle zu, für 47 Prozent ist die Vermögensübertragung von den Eltern auf die Kinder ein wichtiges Thema. 38 Prozent der Teilnehmer sagen, dass die finanzielle Unabhängigkeit vom Ehe- bzw. Lebenspartner bei der Finanzberatung von Privathaushalten von Interesse sei. +++ **BCM interessiert vor allem den Mittelstand:** Gemäß einer Umfrage des Unternehmens Avaya unter 105 Geschäftsführern und IT-Entscheidungsträgern von kleinen (bis 99 Mitarbeiter), mittleren (100 bis 999 Mitarbeiter) und großen deutschen Unternehmen (mehr als 1.000 Mitarbeiter) spielen „Business Continuity" und „Compliance" für 87 Prozent der mittleren Unternehmen eine zentrale Rolle. Für kleine und große Unternehmen scheinen diese Themen dagegen weniger wichtig zu sein. So messen der Compliance nur 72 Prozent der Kleinunternehmen und 73 Prozent der Großunternehmen eine hohe Bedeutung bei. Auch dem Thema Business Continuity räumen sie mit 61 bzw. 62 Prozent eher geringe Bedeutung ein. Nach Einschätzung der Studienautoren lässt dieses Ergebnis vermuten, dass große Unternehmen die ersten Business-Continuity- und Compliance-Projekte bereits umgesetzt haben und sich nun mittlere Unternehmen diesen Themen widmen. +++ **Mehr Reiche:** Nach Angaben des Bundesverbands deutscher Banken (BdB) summiert sich das Vermögen der privaten Haushalte in Deutschland auf mehr als neun Billionen Euro. Abzüglich der Schulden in Höhe von 1,6 Billionen Euro bleibt ein „Nettovermögen" von etwa 7,7 Billionen Euro. Die Deutschen haben demnach 4,5 Billionen Euro Geldvermögen auf Sparkonten, in Wertpapieren, Lebensversicherungen u. ä. angesammelt. Das Immobilien- und Sachvermögen beläuft sich auf etwa 4,8 Billionen Euro. Der überwiegende Teil der Schulden, mehr als eine Billion Euro, geht auf Wohnungsbaukredite zurück. Nach Angaben der Dresdner Bank liegt Deutschland mit einem durchschnittlichen Pro-Kopf-Vermögen von 125.200 Euro deutlich hinter den USA (174.700 Euro; +59 Prozent gegenüber 1997 und Japan (131.000 Euro; -5,9 Prozent gegenüber 1997). Als ein wesentlicher Grund hierfür gilt die eher risikoscheue Anlagepolitik der Deutschen. So ist die Realrendite des deutschen Geldvermögens in den vergangenen 15 Jahren im Vergleich zu den USA um rund 1,3 Prozentpunkte niedriger gewesen. +++ **Mehr reiche Reiche:** Laut einer Studie von Merrill Lynch und Capgemini ist Zahl der so genannten „vermögenden Privatpersonen" (d. h. Privatanleger mit einem Finanzvermögen von über einer Million US-Dollar ohne Berücksichtigung von selbstbewohnten Immobilien und Verbrauchsgütern) in Deutschland im Jahr 2006 um gut vier Prozent auf 798.000 gestiegen. Weltweit wuchs diese Gruppe doppelt so schnell auf 9,5 Mio. Personen mit einem Gesamtvermögen von 37,2 Billionen US-Dollar. Den größten Zuwachs verzeichneten Singapur (+21,2 Prozent) und Indien (+20,5 Prozent). Auch die Zahl der „Ultra-High-Net-Worth-Individuals" mit einem Vermögen von 30 Mio. US-Dollar und mehr ist 2006 weltweit um gut elf Prozent auf 94.970 Personen gestiegen. +++